

Analisis Kestabilan Model $SVEI_1I_2R$ terhadap Pandemi Covid-19

Sisca Sri Dewi Saragih¹, Sariyani Kudadiri²,

¹ Dosen Program Studi Pendidikan Matematika, Universitas Royal

² Dosen Program Studi Pendidikan Biologi, Universitas Royal

¹ siscasridewi29@gmail.com; ² kudadirisariyani@gmail.com

* Email Koresponden

INFO ARTIKEL

ABSTRAK

Covid-19 merupakan masalah kesehatan serius yang terjadi secara global, begitu pula di Indonesia. Pemodelan matematika merupakan salah satu cara melihat bagaimana perkembangan penyebaran pandemi Covid-19. Model yang digunakan dalam penelitian ini adalah $SVEI_1I_2R$ dan akan dilihat kestabilannya. Artikel dibahas mengenai kestabilan titik tetap dengan menggunakan matriks Jacobian dan kriteria Routh-Hurwitz serta Teorema Castillo-Chaves dan Song, bilangan reproduksi, serta analisis numeriknya. Hasil analisis menunjukkan bahwa kestabilan titik tetap berhubungan dengan bilangan reproduksi dasar yang ditentukan dengan the next-generation matrix, analisis kestabilan yang sesuai dengan teorema dan diperlihatkan penyebaran populasi kedalam grafik numerik.

Kata Kunci: Covid-19, Kestabilan

ABSTRACT

Covid-19 is a serious health problem that occurs globally, including in Indonesia. Mathematical modeling is one way to see how the spread of the Covid-19 pandemic is developing. The model used in this study is $SVEI_1I_2R$ and its stability will be seen. The article discusses the stability of fixed points using the Jacobian matrix and the Routh-Hurwitz criterion as well as the Castillo-Chaves and Song Theorems, reproduction numbers, and their numerical analysis. The results of the analysis show that the stability of fixed points is related to the basic reproduction number determined by the next-generation matrix, stability analysis in accordance with the theorem and the distribution of the population is shown in a numerical graph.

Keywords: Covid-19, Stability



This is an open access article under the [CC BY-SA](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/) license.

Copyright ©2024 by Author. Published by PT Beranda Teknologi Academia

PENDAHULUAN

Penyakit menular karena coronavirus 2 (SARSCoV-2) yang menyebabkan sindrom pernafasan akut parah kini dikenal sebagai Covid-19. Pada Desember 2019 di Wuhan, ibu kota Hubei, cina penyakit ini pertama kali diidentifikasi dan terus menyebar secara global [1], [2]. Coronavirus ini terjadi karena adanya interaksi yang terjadi antar agen yang dalam hal ini virus dapat ditularkan kesesama manusia atau bahkan benda sekalipun. Pengumuman WHO pada 12 Maret 2020, bahwa penyakit Covid-19 menjadi pandemik. Hingga tanggal 12 Juli 2023, total kasus Covid-19 di dunia 701,75 kasus dengan 6,97 juta orang meninggal dunia [3],

[4]. Seperti halnya di Cina, virus ini juga tersebar di Indonesia. Data Indonesia pada tanggal 14 Januari 2024 terlihat bahwa ada 6.812.127 kasus yang terinfeksi dan 161,879 orang yang meninggal, terhitung sejak pasien pertama pada 2 maret 2020 di umumkan [5]. Penyakit Covid-19 di Indonesia sangat mengkhawatirkan dimana setiap bulannya jumlah yang terinfeksi mengalami kenaikan. Oleh sebab itu banyak peneliti yang tertarik untuk mempelajari penularan penyakit Covid-19 ini, agar penyebarannya dapat dicegah atau dihentikan terutama dalam bidang matematika dan dibuat model persebarannya[6].

Model persebaran populasi yang sering digunakan adalah model matematika yang akan merepresentasikan secara abstrak suatu fenomena kemudian dibentuk dengan menjadi persamaan untuk menghasilkan perspektif atau penilaian secara umum suatu peristiwa epidemik dengan menyelidiki setiap faktor atau asumsi yang mempengaruhi penyebaran penyakit[7], [8]. Permasalahan yang telah dipertimbangkan setiap asumsinya kemudian diselesaikan dengan model penyebaran populasi matematika untuk melihat penyebaran penyakit. Pada hakekatnya diharapkan dengan model penyebaran populasi matematika ini juga dapat membantu mempermudah menemukan solusi dalam menangani Covid-19 akan semakin berkurang[7], [8].

Para peneliti pemodelan matematika telah membahas bagaimana model matematika Covid-19, seperti penelitian Sasmita et al. [9] yang melihat kontrol optimal model matematika dalam membentuk perkembangan Covid-19 dengan mempertimbangkan dua individu terinfeksi yakni, dengan gejala dan tanpa gejala serta mempertimbangkan imunitas, penelitian yang dilakukan Narila et al. (2021), membahas efektivitas dari implementasi vaksinasi Covid-19 dengan pemodelan matematika, Riyapan et al.[10], membahas pemodelan matematika Covid-19 yang mempertimbangkan kasus terinfeksi akibat terpapar dengan orang yang sudah meninggal. Oleh karena itu, dapat disimpulkan beberapa faktor-faktor yang dapat menekan penyebaran Covid-19 adalah adanya kasus infeksi yang tidak terdeteksi dan kondisi sanitasi serta infeksi dengan gejala berbeda dari orang-orang yang telah dirawat di rumah sakit [11], efektivitas dan dampak vaksinasi ([12], orang yang meninggal [10], dan orang-orang yang melakukan karantina [13]. Hal ini dapat dilihat dengan menganalisis indeks sensitivitas masing-masing faktor yang mempengaruhi penyebarannya.

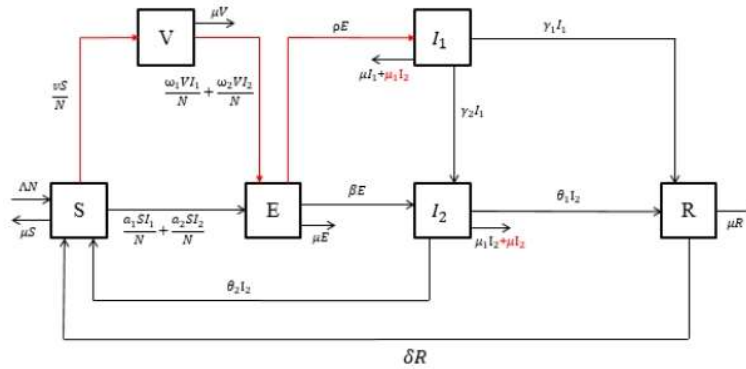
Penelitian dalam artikel ini menggunakan model SVEIR yang mempertimbangkan orang terinfeksi dengan gejala dan terinfeksi tanpa gejala, imunitas, [9] dan mempertimbangkan pengaruh efektivitas vaksinasi [8], [14]. Artikel ini dibahas kestabilan titik tetap pada model SVEIR dan melakukan simulasi numerik.

METODE

Penelitian ini dilakukan dengan memformulasikan model sistem dinamik. Misalkan populasi terdiri atas enam kompartemen, yakni populasi rentan S , populasi terpapar E , populasi terinfeksi tanpa gejala I_1 , populasi terinfeksi dengan gejala I_2 , populasi yang sembuh atau kebal sementara R , Populasi divaksin V . Asumsi yang digunakan dalam model ini adalah:

1. Populasi rentan penyakit Covid-19, yang terbagi menjadi dua berdasarkan gejala yaitu, terdapatnya gejala dan tidak terdapatnya gejala.
2. Populasi manusia rentan akan terinfeksi Covid-19 jika imun yang dimiliki hilang atau turun, sebaliknya populasi manusia rentan akan tidak terinfeksi Covid-19 jika imun yang dimiliki meningkat.
3. Populasi manusia rentan yang di vaksin akan mungkin untuk terpapar.
4. Populasi yang mengalami kontak dengan individu lain yang terinfeksi baik dengan gejala atau tanpa gejala akan menyebabkan terinfeksi

Asumsi yang telah dipertimbangkan menurut penyebaran Covid-19 kemudian digambar seperti Gambar 1.



Gambar 1. Kompartemen Penyakit Covid-19

Berdasarkan gambar diperoleh sistem persamaan diferensial berikut :

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{S}}{dt} &= \Lambda N + \delta \hat{R} + \theta_2 \hat{I}_2 - \left(\frac{\alpha_1 \hat{I}_1}{N} - \frac{\alpha_2 \hat{I}_2}{N} \right) \hat{S} - \frac{v \hat{S}}{N} - \mu \hat{S} \\ \frac{d\hat{V}}{dt} &= \frac{v \hat{S}}{N} - \left(\frac{\omega_1 \hat{I}_1}{N} - \frac{\omega_2 \hat{I}_2}{N} \right) \hat{V} - \mu \hat{V} \\ \frac{d\hat{E}}{dt} &= \frac{\alpha_1 \hat{S} \hat{I}_1}{N} + \frac{\alpha_2 \hat{S} \hat{I}_2}{N} + \left(\frac{\omega_1 \hat{I}_1}{N} - \frac{\omega_2 \hat{I}_2}{N} \right) \hat{V} - \beta \hat{E} - \rho \hat{E} - \mu \hat{E} \\ \frac{d\hat{I}_1}{dt} &= \rho \hat{E} - \gamma_1 \hat{I}_1 - \gamma_2 \hat{I}_1 - \mu \hat{I}_1 - \mu_1 \hat{I}_1 \\ \frac{d\hat{I}_2}{dt} &= \beta \hat{E} + \gamma_2 \hat{I}_1 - \theta_1 \hat{I}_2 - \theta_2 \hat{I}_2 - (\mu + \mu_1) \hat{I}_2 \\ \frac{d\hat{R}}{dt} &= \gamma_1 \hat{I}_1 + \theta_1 \hat{I}_2 - \delta \hat{R} - \mu \hat{R}\end{aligned}\quad (1)$$

Agar persamaan diatas menjadi sederhana maka misakan $S = \frac{\hat{S}}{N}$; $V = \frac{\hat{V}}{N}$; $E = \frac{\hat{E}}{N}$; $I = \frac{\hat{I}}{N}$; dan $R = \frac{\hat{R}}{N}$, sehingga

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= \Lambda + \delta R + \theta_2 I_2 - \alpha_1 S I_1 - \alpha_2 S I_2 - v S - \mu S \\ \frac{dV}{dt} &= v S - \omega_1 V I_1 - \omega_2 V I_2 - \mu V \\ \frac{dE}{dt} &= \alpha_1 S I_1 + \alpha_2 S I_2 + \omega_1 V I_1 + \omega_2 V I_2 - \beta E - \rho E - \mu E \\ \frac{dI_1}{dt} &= \rho E - \gamma_1 I_1 - \gamma_2 I_1 - \mu I_1 - \mu_1 I_1 \\ \frac{dI_2}{dt} &= \beta E + \gamma_2 I_1 - \theta_1 I_2 - \theta_2 I_2 - (\mu + \mu_1) I_2 \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma_1 I_1 + \theta_1 I_2 - \delta R - \mu R\end{aligned}\quad (2)$$

Berikut adalah parameter beserta simbolnya ditunjukkan pada Tabel 1.

Tabel 1. Parameter pada Model Covid-19

Simbol	Keterangan	Satuan
Λ	Angka kelahiran alami	1/waktu
μ	Angka kematian alami	1/waktu
μ_1	Proporsi kematian akibat terinfeksi virus	
a_1	Peluang S menjadi I_1	1/waktu
a_2	Peluang S menjadi I_2	1/waktu
v	Laju vaksinasi	1/waktu
β	Laju transisi penyebaran penyakit	1/waktu
δ	Laju individu sembuh kembali menjadi individu rentan	
γ_1	Laju kelompok yang sembuh karena adanya imun	1/waktu
γ_2	Laju kelompok pembawa tanpa gejala menjadi terlapor akibat test	1/waktu
θ_1	Proporsi individu yang sembuh	-
θ_2	Proporsi error individu sembuh	-
ω_1	Peluang S menjadi E	1/waktu
ω_2	Peluang S menjadi I_1	1/waktu

HASIL DAN PEMBAHASAN

Penentuan Titik Tetap

Titik tetap ada dua, yakni titik tetap bebas penyakit dan titik tetap endemik. Titik tetap bebas penyakit yaitu, $T^0(S^0, V^0, E^0, I_1^0, I_2^0, R^0) = \left(\frac{\Lambda}{v+\mu}, \frac{v\Lambda}{\mu(v+\mu)}, 0, 0, 0, 0\right)$, dan titik tetap endemik nya $T^* = (S^*, V^*, E^*, I_1^*, I_2^*, R^*)$, dengan

$$\begin{aligned}
 S^* &= \frac{R^*\delta + I_2^*\theta_2 + \Lambda}{v + I_1^*\alpha_1 + I_2^*\alpha_2 + \mu} \\
 V^* &= \frac{S^*v}{\mu + I_1^*\omega_1 + I_2^*\omega_2} \\
 E^* &= \frac{I_1^*S^*\alpha_1 + I_2^*S^*\alpha_2 + I_1^*V^*\omega_1 + I_2^*V^*\omega_2}{\beta + \mu + \rho} \\
 I_1^* &= \frac{E^*\rho}{\gamma_1 + \gamma_2 + \mu + \mu_1} \\
 I_2^* &= \frac{E^*\beta + I_1^*\gamma_2}{\theta_1 + \theta_2 + \mu + \mu_1} \\
 R^* &= \frac{I_1^*\gamma_1 + I_2^*\theta_1}{\delta + \mu}
 \end{aligned}$$

Bilangan reproduksi dasar ($\mathcal{R}_0$)

Bilangan reproduksi dasar ($\mathcal{R}_0$) dibuat dengan menggunakan *the next generation matrix* dengan $G = FV^{-1}$ dimana

$$F = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 S^0 + \omega_2 V^0 & \alpha_2 S^0 + \omega_3 V^0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ -\rho & k_2 & 0 \\ -\beta & -\gamma_2 & k_3 \end{pmatrix}$$

dengan

$$k_1 = \beta + \mu + \rho$$

$$\begin{aligned}k_2 &= \gamma_1 + \gamma_2 + \mu + \mu_1 \\k_3 &= \theta_1 + \theta_2 + \mu + \mu_1\end{aligned}$$

Sehingga Bilangan reproduksi dasar adalah

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\lambda(k_2\beta(\alpha_2\mu + v\omega_2) + \rho(k_3\alpha_1\mu + \alpha_2\gamma_2\mu + k_3v\omega_1 + v\gamma_2\omega_2))}{k_1k_2k_3\mu(v + \mu)} \quad (4)$$

Kestabilan Titik Tetap

Teorema 1. Kestabilan titik tetap bebas penyakit pada titik T^0 akan stabil asimtotik lokal jika dan hanya jika $\mathcal{R}_0 < 1$ dan tidak stabil jika $\mathcal{R}_0 > 1$

Bukti :

Kestabilan titik tetap bisa dianalisis dengan mensubstitusi titik tetap bebas penyakit $T^0 = (S^0, V^0, 0, 0, 0, 0)$ kedalam matriks Jacobian dan dapat kita lihat seperti dibawah ini:

$$J_{T^0} = \begin{bmatrix} j_{11} - \lambda & 0 & 0 & j_{14} & j_{15} & j_{16} \\ j_{21} & j_{22} - \lambda & 0 & j_{24} & j_{25} & 0 \\ 0 & 0 & j_{33} - \lambda & j_{34} & j_{35} & 0 \\ 0 & 0 & j_{43} & j_{44} - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & j_{53} & j_{54} & j_{55} - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & j_{64} & j_{65} & j_{66} - \lambda \end{bmatrix}$$

dimana:

$$\begin{aligned}j_{11} &= -v - \mu; & j_{35} &= \alpha_2 S^0 + \omega_2 V^0; \\j_{14} &= -\alpha_1 S^0; & j_{43} &= \rho; \\j_{15} &= -\alpha_2 S^0; & j_{44} &= -\gamma_1 - \gamma_2 - \mu - \mu_1; \\j_{16} &= \delta; & j_{53} &= \beta; \\j_{21} &= v; & j_{54} &= \gamma_2; \\j_{22} &= -\mu; & j_{55} &= -\theta_1 - \theta_2 - \mu - \mu_1; \\j_{24} &= -\omega_1 V^0; & j_{64} &= \gamma_1; \\j_{25} &= -\omega_2 V^0; & j_{65} &= \theta_1; \\j_{33} &= -\beta - \mu - \rho; & j_{66} &= -\mu - \delta; \\j_{34} &= \alpha_1 S^0 + \omega_1 V^0;\end{aligned}$$

dengan menggunakan persamaan $|J_{T^0} - \lambda I| = 0$ maka akan diperoleh 5 nilai eigen yang dapat dianalisis, yaitu $(j_{11} - \lambda)(j_{22} - \lambda)(j_{66} - \lambda)(\lambda^3 + c_1\lambda^2 + c_2\lambda + c_3) = 0$ maka diperoleh $\lambda_1 = -\alpha_4 - \mu$ dan $\lambda_2 = j_{55} - \mu$ artinya kedua nilai eigen tersebut adalah negatif. Untuk ketiga nilai eigen lainnya dapat diperoleh dengan menggunakan bantuan Kriteria Routh-Hurwitz.

$$(c_0\lambda^3 + c_1\lambda^2 + c_2\lambda + c_3 = 0$$

dimana :

$$\begin{aligned}c_0 &= 1 > 0 \\c_1 &= k_1 + k_2 + k_3 > 0 \\c_2 &= k_1k_2(1 - \mathcal{R}_{02}) + k_1k_3(1 - \mathcal{R}_{01}) + k_2k_3 > 0 \\c_3 &= k_1k_2k_3(1 - \mathcal{R}_0) > 0\end{aligned}$$

karena setiap parameter bernilai positif sehingga pastinya $c_1, c_2, c_3 > 0$ dan ini memenuhi kriteria Routh Hurwitz dan memenuhi $\mathcal{R}_0 < 1$, maka nilai eigennya akan bernilai negatif. Terbukti titik tetap bebas penyakit akan stabil asimtotik.

Teorema 2 : Jika $\mathcal{R}_0 > 1$ maka titik tetap endemik, bersifat stabil asimtotik

Bukti:

Pembuktian menggunakan Teorema Castillo-Chaves dan Song [15]. Misalkan $\varphi = a_1$ adalah parameter bifurkasi. Berdasarkan $\mathcal{R}_0 = 1$ mengakibatkan

$$a_1 = \varphi^* = \frac{k_1 k_2 k_3 - k_2 \beta (S^0 \alpha_2 + V^0 \omega_2) - \rho S^0 \alpha_2 \gamma_2 - \rho k_3 V^0 \omega_1 - \rho \gamma_2 \omega_2}{\rho k_3}$$

Titik tetap T^0 mempunyai enam nilai eigen jika $\mathcal{R}_0 = 1$ atau $a_1 = \varphi^*$. Nilai eigen tersebut memiliki vektor eigen kanan $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6)$ dan vektor eigen kiri $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6)$ yang saling berkaitan. Vektor eigen kanan $\lambda = 0$ diperoleh dengan menyelesaikan persamaan $(J_{T^0} - \lambda I)u = 0$, sehingga:

misalkan $u_4 > 0$,

$$\begin{aligned} u_3 &= -\frac{j_{44}}{j_{43}} u_4 = \frac{k_2}{\rho} u_4 > 0, \\ u_5 &= -\frac{j_{33}}{j_{35}} u_3 - \frac{j_{34}}{j_{35}} u_4 = -\frac{(-\beta - \mu - \rho)}{\alpha_2 S^0 + \omega_2 V^0} u_3 - \frac{\alpha_1 S^0 + \omega_1 V^0}{\alpha_2 S^0 + \omega_2 V^0} u_4 \\ &= \frac{k_1 \rho}{k_1 k_2} \left(\frac{k_2}{\rho} u_4 \right) - \frac{\rho \gamma_2}{\rho k_3} u_4 > 0, \\ u_6 &= -\frac{j_{64}}{j_{66}} u_4 - \frac{j_{65}}{j_{66}} u_5 = -\frac{\gamma_1}{(-\mu - \delta)} u_4 - \frac{\theta_1}{(-\mu - \delta)} u_5 > 0, \\ u_1 &= -\frac{j_{14}}{j_{11}} u_4 - \frac{j_{15}}{j_{11}} u_5 - \frac{j_{16}}{j_{11}} u_6 = -\frac{(-\alpha_1 S^0)}{(-v - \mu)} u_4 - \frac{(-\alpha_2 S^0)}{(-v - \mu)} u_5 - \frac{\delta}{(-v - \mu)} u_6 < 0 \\ u_2 &= -\frac{j_{21}}{j_{22}} u_1 - \frac{j_{23}}{j_{22}} u_3 - \frac{j_{24}}{j_{22}} u_4 - \frac{j_{25}}{j_{22}} u_5 = -\frac{v}{-\mu} u_1 - \frac{-\omega_1 V^0}{-\mu} u_4 - \frac{-\omega_2 V^0}{-\mu} u_5 < 0, \end{aligned}$$

sehingga diperoleh $u_1, u_2 < 0$, dan $u_3, u_4, u_5, u_6 > 0$.

Vektor eigen kiri $\lambda = 0$ diperoleh dengan menyelesaikan persamaan $(J_{T^0}^T - \lambda I)v = 0$

misalkan $v_5 > 0$

$$\begin{aligned} j_{22} v_2 &= 0, \text{ maka } v_2 = 0 \\ v_1 &= -\frac{j_{21}}{j_{11}} v_2 = 0 \\ v_6 &= -\frac{j_{16}}{j_{66}} v_1 = 0 \\ v_3 &= -\frac{j_{55}}{j_{35}} v_5 - \frac{j_{65}}{j_{35}} v_6 = -\frac{(-\theta_1 - \theta_2 - \mu - \mu_1)}{\alpha_2 S^0 + \omega_2 V^0} v_5 > 0 \\ v_4 &= -\frac{j_{53}}{j_{43}} v_5 - \frac{j_{33}}{j_{43}} v_3 = -\frac{\beta}{\rho} v_5 - \frac{(-\beta - \mu - \rho)}{\rho} v_3 > 0 \end{aligned}$$

dengan

$$x_1 = S; x_2 = V; x_3 = E; x_4 = I_1; x_5 = I_2; x_6 = R$$

maka

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{dx_1}{dt} = \Lambda + \delta x_6 + \theta_2 x_5 - \varphi x_1 x_4 - \alpha_2 x_1 x_5 - v x_1 - \mu x_1 \\ f_2 &= \frac{dx_2}{dt} = v x_1 - \omega_1 x_2 x_4 - \omega_2 x_2 x_5 - \mu x_2 \\ f_3 &= \frac{dx_3}{dt} = \varphi x_1 x_4 + \alpha_2 x_1 x_5 + \omega_1 x_2 x_4 + \omega_2 x_2 x_5 - \beta x_3 \\ &\quad - \rho x_3 - \mu x_3 \\ f_4 &= \frac{dx_4}{dt} = \rho x_3 - \gamma_1 x_4 - \gamma_2 x_4 - \mu x_4 - \mu_1 x_4 \\ f_5 &= \frac{dx_5}{dt} = \beta x_2 + \gamma_2 x_4 + \delta x_6 - \theta_1 x_5 - \theta_2 x_5 - (\mu + \mu_1) x_5 \end{aligned}$$

$$f_6 = \frac{dx_6}{dt} = \gamma_1 x_4 + \theta_1 x_5 - \delta x_6 - \mu x_6$$

Berdasarkan persamaan diperoleh turunan parsial untuk persamaan berikut

$$\frac{\partial^2 f_3}{\partial x_2 x_4} (T^0, \varphi^*) = \omega_1$$

$$\frac{\partial^2 f_3}{\partial x_2 x_5} (T^0, \varphi^*) = \omega_2$$

$$\frac{\partial^2 f_3}{\partial x_1 x_4} (T^0, \varphi^*) = \varphi^*$$

$$\frac{\partial^2 f_3}{\partial x_1 x_5} (T^0, \varphi^*) = \alpha_2$$

Sehingga berdasarkan persamaan diperoleh

$$a = v_3 u_2 u_4 \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_2 x_4} (T^0, \varphi^*) + v_3 u_2 u_5 \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_2 x_5} (T^0, \varphi^*) + v_3 u_1 u_4 \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_1 x_4} (T^0, \varphi^*) + v_3 u_1 u_5 \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_1 x_5} (T^0, \varphi^*)$$

karena $u_2 < 0$, dan $u_3, u_4, u_5, v_3 > 0$, maka $a < 0$, dan

$$b = v_3 u_1 \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \varphi} (T^0, \varphi^*) + v_3 u_4 \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_4 \varphi} (T^0, \varphi^*) = v_3 u_4 \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_4 \varphi} (T^0, \varphi^*)$$

karena $u_4, v_3 > 0$, maka $b > 0$

Nilai a dan b yang diperoleh dengan $a < 0$ dan $b > 0$ ini sesuai dengan kasus 4 pada Teorema Castillo-Chaves dan song [16]. Akibatnya $\varphi < \varphi^* (\mathcal{R}_0 < 1)$ menjadi $\varphi < \varphi^* (\mathcal{R}_0 > 1)$, titik tetap endemik T^* yang tidak stabil sehingga berubah menjadi positif hingga menyebabkan stabil asimtotik lokal.

Simulasi Numerik

Pada simulasi ini, akan menggunakan nilai parameter yang tertera pada Tabel 2.

Tabel 2. Nilai Parameter pada Model Covid-19

Simbol	Nilai	Referensi
a_1	0,0184	[9]
a_2	0,0731	[9]
v	0,0002	[17]
β	0,4	[9]
μ	0,006567	[17]
γ_1	0,075	[9]
γ_2	0,036	[9]
Δ	0,9629	[18]
ρ	0,0285	[11]
ω_1	0,00047	[17]
ω_2	0,00334	[17]
Λ	0,01755	[19]
μ_1	0.0002211	[8]

Dalam kasus ini untuk mengetahui nilai parameter yang terdapat pada Tabel 2 ada beberapa cara yang harus dilakukan. Beberapa parameter yang digunakan pada model harus berbentuk estimasi karena beberapa data yang kurang sesuai. Menurut pernyataan WHO,

bahwa dari kasus penyebaran nya pathogenesis Covid-19 pada seorang individu dapat menginfeksi hingga 2-2,5 orang selama 4 hari[20]. Berdasarkan pernyataan tersebut, peluang individu sembuh kembali menjadi individu rentan dapat di cari dengan cara $\varphi_2 = (1 - (\varphi_1 + \mu)R)/R$. Proporsi individu yang sembuh dapat di cari dengan cara $\theta_1 = R/(I_2 + Q + I_1)$.

Nilai parameter yang digunakan telah disusun dan dapat dilihat pada Tabel 2. kemudian nilai-nilai parameter ini selanjutnya akan digunakan untuk melakukan analisis numerik, dimana nilai awal pada masing-masing sub-populasi adalah $S(0) = 0.9934, V(0) = 0.7624, E(0) = 0.05164, I_1(0) = 0.036, I_2(0) = 0.1248, R(0) = 0.176$ [4]. Adapun simulasi ini dilakukan untuk mengetahui pengaruh adanya kontak seperti Gambar 2, dimana $T^0(S = 0.9951; V = 0.0049; E = 0; I_1 = 0; I_2 = 0; R = 0)$.

1. Dinamika Populasi dengan kondisi $\mathcal{R}_0 < 1$

Nilai $\mathcal{R}_0 \approx 0.96555$. Titik tetap tanpa penyakit yang diperoleh adalah $T^0 = (2,593468, 0,078985, 0,0,0,0)$. Dengan melakukan pelinearan pada sistem di titik T^0 diperoleh nilai eigen real yang bernilai negatif yaitu

$$\lambda_1 = -0.969467$$

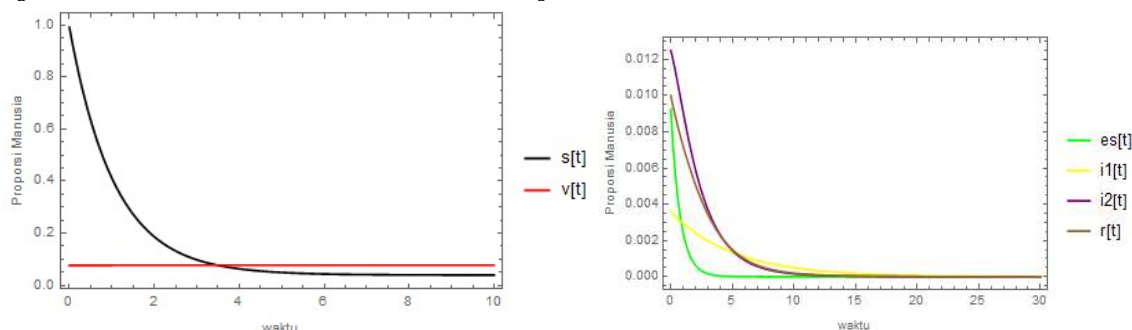
$$\lambda_4 = -0.011363$$

$$\lambda_2 = -0.615918$$

$$\lambda_5 = -0.006767$$

$$\lambda_3 = -0.206919$$

$$\lambda_6 = -0.006567$$



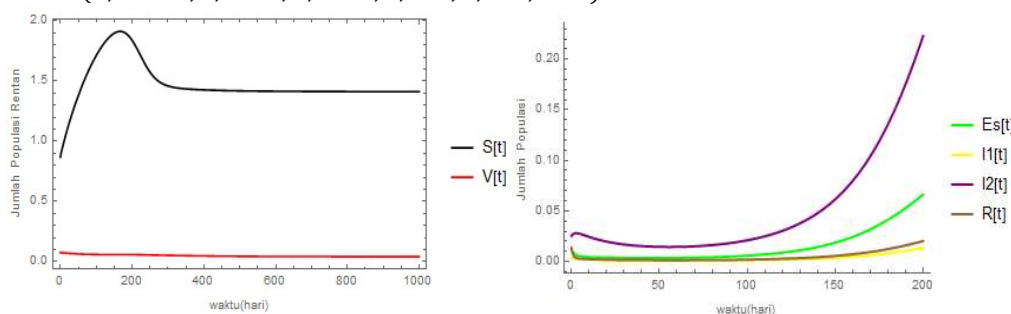
Gambar 2. Dinamika Populasi pada kondisi $\mathcal{R}_0 < 1$

Gambar 2. menggambarkan kesesuaian teorema apabila kondisi penyebaran penyakit bebas pada penyakit ($\mathcal{R}_0 < 1$) maka grafik pun akan stabil menuju titik tetap bebas penyakitnya. Terlihat jelas model matematika tersebut dapat memprediksi penurunan poenyebaran penyakit hingga tidak ada lagi yang terinfeksi, Dimana menurut gambar jika semua populasi tergambar seperti yang dimodelkan maka sekitar hari ke-10 maka penyakit Covid-19 akan menghilang dari sistem atau dapat diatasi.

2. Dinamika Populasi dengan kondisi $\mathcal{R}_0 > 1$

Nilai $\mathcal{R}_0 \approx 1,83757$. Titik tetap tanpa penyakit yang diperoleh adalah

$$T^* = (1,41196, 0,0298, 0,2064, 0,049, 0,863, 0.08)$$



Gambar Dinamika Populasi pada kondisi $\mathcal{R}_0 > 1$

Gambar 3. menggambarkan kesesuaian teorema apabila kondisi penyebaran penyakit Ketika ada virus menyerang ($\mathcal{R}_0 > 1$) maka grafik pun akan stabil menuju titik tetap dengan penyakitnya. Terlihat jelas model matematika tersebut dapat memprediksi kenaikan penyebaran penyakit hingga titik kestabilan, Dimana menurut gambar jika semua populasi tergambar seperti yang dimodelkan maka sekitar hari ke-100 maka penyakit Covid-19 akan meningkat terus sesuai system maka kita perlu menghindari laju parameter yang ada.

KESIMPULAN

Model $SVEI_1I_2R$ telah digunakan dalam memodelkan penyebaran pengakit Covid-19 dengan mempertimbangkan dua individu terinfeksi yaitu dengan gejala dan tanpa gejala. Model ini juga mempertimbangkan pemberian vaksinasi pada populasi manusia awal yang rentan akan penyakit dan mempertimbangkan imunitas. Pada model modifikasi ini didapatkan dua titik tetap yaitu titik tetap bebas penyakit yang akan bersifat stabil asimtotik lokal pada keadaan $\mathcal{R}_0 < 1$ dan titik tetap endemik penyakit/terdapat penyakit yang akan stabil asimtotik lokal pada kondisi $\mathcal{R}_0 > 1$ kedua hal tersebut dibuktikan dengan menggunakan teorema kestabilan titik tetap. Hasil simulasi numerik yang dilakukan menunjukkan hasil yang sesuai dengan teorema. Serta hasil numerik juga menunjukan kestabilan model akan memperlihatkan bagaimana kondisi penyebaran semakin naik atau semakin turun sesuai dengan bilangan reproduksinya.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] F. Ndaïrou, I. Area, J. J. Nieto, and D. F. M. Torres, "Mathematical modeling of COVID-19 transmission dynamics with a case study of Wuhan," *nasional.kompas.com*, no. January, 2020, Accessed: Jan. 18, 2021. [Online]. Available: <https://nasional.kompas.com/read/2021/01/16/15380351/update-16-januari-tambah-14224-kini-ada-896642-kasus-covid-19-di-indonesia>
- [2] S. R. Bandekar and M. Ghosh, "ScienceDirect A co-infection model on TB - COVID-19 with optimal control and sensitivity analysis," *Math Comput Simul*, vol. 200, pp. 1–31, 2022, doi: 10.1016/j.matcom.2022.04.001.
- [3] Kemenkes, "Situasi Terkini Perkembangan Coronavirus Disease (Covid-19)," 2021. Accessed: Jan. 16, 2021. [Online]. Available: <https://infeksiemerging.kemkes.go.id/situasi-infeksi-emerging/situasi-terkini-perkembangan-coronavirus-disease-covid-19-16-januari-2021>
- [4] Kemenkes, "Analisis Data COVID-19 Indonesia (Update Per 30 Agustus 2020) - Berita Terkini | Covid19.go.id," Portal COVID-19 Indonesia. Accessed: Jun. 17, 2021. [Online]. Available: <https://covid19.go.id/p/berita/analisis-data-covid-19-indonesia-update-30-mei-2021>
- [5] D. E. Nugraheny, "UPDATE 16 Januari: Tambah 14.224, Kini Ada 896.642 Kasus Covid-19 di Indonesia," *nasional.kompas.com*. [Online]. Available: www.elsevier.com/locate/chaos
- [6] D. Kannan, R. Gurusriram, R. Banerjee, S. Bhattacharjee, and P. K. Varadwaj, "Will there be a third COVID-19 wave? A SVEIRD model-based study of India's situation," *Indian Journal of Physics*, vol. 95, no. 11, pp. 2513–2521, 2021, doi: 10.1007/s12648-021-02196-w.
- [7] M. Manaqib, M. Azizah, E. Hartati S., S. Pratiwi, and R. A. Maulana, "Analisis Model Matematika Penyebaran Penyakit Covid-19 Dengan Lockdown Dan Karantina," *BAREKENG: Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan*, vol. 15, no. 3, pp. 479–492, 2021,

- doi: 10.30598/barekengvol15iss3pp479-492.
- [8] A. R. Nuha, N. Achmad, and N. 'Ain Supu, "Analisis Model Matematika Penyebaran Covid-19 dengan Intervensi Vaksinasi dan Pengobatan," *Jurnal Matematika UNAND*, vol. 10, no. 3, p. 406, 2021, doi: 10.25077/jmu.10.3.406-422.2021.
 - [9] N. R. Sasmita, M. Ikhwan, S. Suyanto, and V. Chongsuvivatwong, "Optimal Control on A Mathematical Model to Pattern The Progression of Coronavirus Disease 2019 (COVID-19) in Indonesia," *Glob Health Res Policy*, vol. 5, no. 1, 2020, doi: 10.1186/s41256-020-00163-2.
 - [10] P. Riyapan, S. E. Shuaib, and A. Intarasit, "A Mathematical Model of COVID-19 Pandemic: A Case Study of Bangkok, Thailand," *Comput Math Methods Med*, vol. 2021, p. 11, 2021, doi: 10.1155/2021/6664483.
 - [11] B. Ivorra, M. R. Ferrández, M. Vela-pérez, and A. M. Ramos, "Mathematical Modeling of The Spread of The Coronavirus Disease 2019 (COVID-19) Taking into Account The Undetected Infections. The Case of China," *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat*, no. January, 2020, doi: 0.1016/j.cnsns.2020.105303.
 - [12] N. M. Nasir, I. S. Joyosemito, B. Boerman, and I. Ismaniah, "Kebijakan Vaksinasi COVID-19: Pendekatan Pemodelan Matematika Dinamis pada Efektivitas dan Dampak Vaksin di Indonesia," *Jurnal Pengabdian kepada Masyarakat UBJ*, vol. 4, no. 2, pp. 191–204, 2021, doi: 10.31599/jabdimas.v4i2.662.
 - [13] Resmawan and L. Yahya, "Sensitivity Analysis of Mathematical Model of Coronavirus Disease (COVID-19) Transmission," *CAUCHY –Jurnal Matematika Murni dan Aplikasi*, vol. 6, no. 2, pp. 91–99, 2020.
 - [14] Resmawan, L. Yahya, R. S. Pakaya, and H. S. Panigoro, "Analisis Dinamik Model Penyebaran COVID-19 dengan Vaksinasi," *Jambura Journal of Mathematics*, vol. 3, no. 1, pp. 29–38, 2022.
 - [15] F. Brauer, C. Castillo-Chavez, and Z. Feng, *Mathematical models in epidemiology*, vol. 28, no. 42/01. Springer, 2000. doi: <https://doi.org/10.1007/978-1-4939-9828-9>.
 - [16] F. Brauer and C. Castillo-Chavez, *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*, 2nd ed., vol. 69, no. 4. New York: Springer, 2011. doi: 10.2307/1941295.
 - [17] Resmawan, A. R. Nuha, and L. Yahya, "Analisis Dinamik Model Transmisi COVID-19 dengan Melibatkan Intervensi Karantina," *Jambura Journal of Mathematics*, vol. 3, no. 1, pp. 66–79, 2021, doi: 10.34312/jjom.v3i1.8699.
 - [18] Qifang *et al.*, "Epidemiology and Transmission of COVID-19 in Shenzhen China: Analysis of 391 cases and 1,286 of their close contacts," *MedRxiv*, vol. 1, no. march, 2020, doi: 10.1101/2020.03.03.20028423.
 - [19] The World Bank, "Birth rate, Crude (per 1,000 people) - Indonesia, Greenland | Data," World Bank Group. Accessed: Jun. 19, 2021. [Online]. Available: <https://data.worldbank.org/indicator/SP.DYN.CBRT.IN?end=2020&locations=ID-GL&start=1960>
 - [20] WHO, "Pertanyaan Jawaban Terkait COVID- 19 untuk Publik. World Health Organization Indonesia," World Health Organization. Accessed: Apr. 08, 2021. [Online]. Available: <https://www.who.int/indonesia/news/novel-coronavirus/qa/qa-for-public>